© АВТОМАТИКА И ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ. 2013, №1(3)

Идентификация линейных динамических систем с использованием концепции сепараторов параметрического пространства

Т.В.Авдеенко
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация: **Рассматривается проблема структурной идентифицируемости моделей в пространстве состояний. Мы предлагаем эффективный подход к анализу структурной идентифицируемости, включающий необходимое и достаточное условие для анализа как локальной, так и глобальной идентифицируемости, а также процедуры для элиминирования неидентифицируемости. В отличие от других методов данный подход требует значительно меньший объем символьных вычислений, и, таким образом. позволяет проводить анализ моделей больших размерностей. В настоящей статье описывается суть предлагаемого подхода, даются определения слабого, истинного и ложного сепараторов, а также алгоритм построения истинных сепараторов. Также рассматривается пример существования трех линейных сепараторов модельной структуры, соответствующих шести решениям задачи оценивания неизвестных параметров, выявляется их геометрическое расположение и свойства.**

Ключевые слова: **параметрическая идентификация, идентифицируемость, линейные динамические модели в пространстве состояний, параметрическое пространство.**

I. ВВЕДЕНИЕ

Параметрическая идентификация динамических систем предполагает прохождение двух последовательных этапов. На первом этапе на основе априорных знаний о закономерностях в изучаемой области строится математическая модель исследуемого объекта, включающая неизвестные параметры (как правило, константы). На втором этапе оцениваются незвестные параметры модели на основе экспериментальных данных. Далее проверяется адекватность модели, в результате чего описанные выше этапы могут многократно повторяться для достижения хорошего соответствия модели реальному объекту или явлению.

Фундаментальной проблемой, решаемой в процессе параметрической идентификации является анализ априорной структурной идентифицируемости модели [1], в результате которого определяется число и расположение точек параметрического пространства (оценок неизвестных параметров), являющихся решениями задачи параметрической идентификации. Если существует несколько точек параметрического пространства (не единственная точка), одинаково хорошо соответствующих экспериментальным данным, мы имеем неидеентифицируемую модельную структуру. Таким образом, идентифицируемость есть свойство модельной структуры допускать одно или более решений задачи параметрической идентификации. Мы различаем *локальную идентифицируемость*, гарантирующую единственность решения только в некоторой окрестности произвольной точки параметрического пространства, а также *глобальную идентифицируемость*, когда существует единственное решение во всем параметрическом пространстве.

Представим более строгие определения различных типов идентифицируемости [2]. Обозначим совпадение входов и выходов модели, полученных для двух различных значений θ и θ^* вектора параметров $M(\theta) \approx M(\theta^*)$. Это свойство называется неразличимостью моделей по наблюдениям входа и выхода. Параметр θ_i называется структурно глобально идентифицируемым (СГИ) если почти для любого $\theta^* \in \Omega$ (за исключением подмножеств нулевой меры параметрического пространства Ω) выполняется $M(\theta) \approx M(\theta^*) \Rightarrow \theta_i = \theta_i^*$. Параметр θ_i называется структурно локально идентифицируемым (СЛИ), если почти для любого $\theta^* \in \Omega$ существует окрестность $v(\theta^*)$ такая что если $\theta \in v(\theta^*)$, то $M(\theta) \approx M(\theta^*) \Rightarrow \theta_i = \theta_i^*$. Локальная идентифицируемость, очевидно, является необходимым условием глобальной идентифицируемости. Параметр, который является СЛИ, но не является СГИ, называется структурно глобально неидентифицируемым (СГНИ). Параметр, который не является СЛИ, называется структурно локально неидентифицируемым (СНИ или СЛНИ). Модель $M(\theta)$ называется СГИ (СЛИ), если все ее параметры являются

СГИ (СЛИ). Модель называется СНИ, если какой-либо из ее параметров является СНИ.

В настоящей статье мы рассматриваем линейную модельную структуру в пространстве состояний. Для проверки структурной идентифицируемости таких моделей предлагались различные методы [3], [1]. Однако проблема заключается в том, что проверка структурной идентифицируемости достаточно простых моделей быстро приводит к очень сложным алгебраическим манипуляциям. Системы компьютерной математики (Maple, Matlab, Matcad) могут оказать большую помощь в проведении такого рода вычислений. Однако нельзя полагатьz лишь на вычислительные мощности современных компьютеров в тех случаях, когда решаемые задачи (задачи символьной математики) относятся к классу NP-сложных. Проведение экспериментов с использованием программы Maple показало, что такие хорошо известные методы анализа идентифицируемости, как метод передаточной функции или метод матриц Маркова, позволяют исследовать модели с размерностью вектора состояний, не превышающей 4-6, с использованием средств символьной математики.

Нами разрабатывается подход к проверке структурной идентифицируемости, который не генерирует столь сложных вычислений, позволяя исследовать модели гораздо больших размерностей. В [4-6] предлагаются условия для проверки как локальной, так и глобальной идентифицируемости (условия ранга и порядка для локальной и глобальной идентифицируемости). Предварительные исследования выявили, что предлагаемый подход является очень перспективным. Объем символьных вычислений, производимых при применении условий ранга и порядка, оказался менее чувствительным к увеличению размерности модели, чем существующие методы. С использованием предлагаемых методов удалось повысить размерности моделей, которые могут быть исследованы чисто аналитически до 7-8 для глобального анализа и до 15 (и даже более) при анализе локальной идентифицируемости.

Кроме того, идея использования сепараторов параметрического пространства, возникшая в результате разработки данного подхода, оказывается еще более обещающей. Сильные сепараторы определяются как гиперповерхности, разделяющие параметрическое пространство на различные связные области. В каждой такой области существует одно и только одно решение задачи параметрической идентификации. Знание уравнений сильных сепараторов дает информацию о числе и локализации решений. Именно знание геометрии задачи представляет очевидный практический интерес. Данная информация может быть использована, например, для разработки алгоритма оценивания параметров глобально неидентифицируемых моделей. Кроме того, формулы для уравнений сепараторов можно использовать для элиминирования глобальной неидентифицируемости. К сожалению, не существует прямолинейной процедуры нахождения сильных сепараторов. Однако в рамках разработанного подхода предлагается концепция истинного сепаратора. Исследование большого числа модельных структур позволяет предположить, что истинные сепараторы в действительности являются сильными сепараторами параметрического пространства.

В настоящей статье описывается суть предлагаемого подхода, даются определения истинного, слабого и ложного сепаратора и рассматривается интересный пример существования трех линейных сепараторов модельной структуры в пространстве состояний.

Мы показываем, что найденные истинные сепараторы в действительности являются сильными, они разделяют параметрическое пространство на шесть областей, каждая из которых содержит одно и только одно решение задачи параметрической идентификации.

II. УСЛОВИЯ РАНГА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛОКАЛЬНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Разрабатываемый подход основан на представлении модельной структуры в пространстве состояний в виде естественной параметризации с линейными ограничениями на элементы системных матриц.

$$M(s): \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\Gamma s = \Gamma^0, \tag{2}$$

где $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times k}$, $C \in R^{m\times n}$ - системные матрицы; s - вектор системных параметров, состоящий из элементов системных матриц, вытянутых по строкам $s^T = (\bar{A}^T, \bar{B}^T, \bar{C}^T)$, $s \in R^N$, $N = n^2 + nk + nm$, Γ и Γ^0 - числовые $r\times N$ - и $r\times 1$ - матрицы, $rg\,\Gamma = r$, $r < N$. Обозначим θ вектор неизвестных параметров размерности $N - r = p$, состоящий из независимых системных параметров, полученный из системы (2).

Предварительный этап предлагаемого метода заключается в вычислении специальных матриц: матрицы локальной идентифицируемости ΓX и матрицы глобальной идентифицируемости ΓX^*, где дополнительные матрицы X и X^* определяются следующим образом

$$X^* = X^*(\theta^*, \theta) = \begin{pmatrix} A(\theta^*) \otimes I_n - I_n \otimes A^T(\theta) \\ -I_n \otimes B^T(\theta) \\ C(\theta^*) \otimes I_n \end{pmatrix},$$

$$X = X^*(\theta^*, \theta)\Big|_{\theta^* = \theta} = \begin{pmatrix} A(\theta) \otimes I_n - I_n \otimes A^T(\theta) \\ -I_n \otimes B^T(\theta) \\ C(\theta) \otimes I_n \end{pmatrix}.$$

Исследование локальной идентифицируемости основывается на следующих необходимом и достаточном условиях локальной идентифицируемости (**условие ранга для СЛИ**):

$$rank\, \Gamma X \;=\; cols(\Gamma X) = n^2, \tag{3}$$

Почти для любого θ. Общий ранг символьной матрицы ΓX может быть вычислен с использованием любой из систем символьных вычислений, например, Matlab. Если СЛИ-матрица ΓX имеет полный столбцовый ранг, модель является СЛНИ. Мы называем ее моделью неполного ранга. В этом случае мы можем использовать специальные процедуры для элиминирования локальной неидентифицируемости [4].

Если модель оказывается СЛИ, следующим этапом является анализ глобальной идентифицируемости. Это наиболее сложная вычислительная процедура, основанная на предварительной проверке достаточного условия глобальной идентифицируемости (**условие ранга для СГИ**):

$$rank\, \Gamma X^* \;=\; cols(\Gamma X^*) = n^2, \tag{4}$$

сразу почти для всех θ и θ^* (за исключением точек, составляющих множества вида $e(\theta^*) = 0$ или $g(\theta) = 0$ с нулевой мерой).

Фундаментальным отличием условия (4) от условия (3) является то, что элементы СГИ-матрицы ΓX^* зависит от двух точек θ и θ^*. В этом случае невозможно использовать стандартную операцию вычисления общего ранга матрицы ΓX^* (встроенную во все системы символьных вычислений), так как элементы векторов θ и θ^* могут оказаться взаимно зависимыми. На самом деле задача заключается в построении зависимостей вида $f(\theta^*, \theta) = 0$ (связывающих две точки параметрического пространства) для которых условие (4) не выполняется. Такие зависимости могут быть найдены в результате факторизации (разложения на множители)

$$\det[(\Gamma X^*)^{\mathrm{T}} \Gamma X^*] = \prod_i e_i(\theta^*) \prod_j g_j(\theta) \prod_{l=1}^{L} f_l(\theta^*, \theta) = 0 \tag{5}$$

Если в разложении на множители (5) нет множителей вида $f_l(\theta^*, \theta)$, то модель является СГИ в соответствие с достаточным условием (4). Если подобные множители присутствуют в разложении, модель может оказаться либо СЛИ, либо СГНИ. В данном случае можно использовать необходимое и достаточное условие СГИ [4].

Необходимым и достаточным условием СГИ модели является совместность следующей системы уравнений для всех l $(1 \le l \le L)$ относительно неизвестных (T, θ^*):

$$\begin{cases} f_l(\theta^*, \theta) = 0, \\ X^*(\bar{T} - \bar{I}_n) + s(\theta^*) - s(\theta) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\theta^* \in \Omega$, $\bar{T}$, $\bar{I}_n$ - векторы, полученные из матриц T и I_n, вытянутых по строкам; I_n - единичная матрица порядка n, $T \in GL(n) = \{T : \det T \ne 0\}$ - матрица преобразования подобия. Второе матричное уравнение в (6) является исходной системой преобразования подобия, полученной в результате применения метода преобразования подобия, лежащего в основе разрабатываемого подхода.

Для некоторых практически значимых классов модельных структур мы получили специальные формы СЛИ и СГИ-матриц пониженной размерности. Этими классами являются следующие: класс со стандартными числовыми матрицами управления и наблюдения, класс с произвольными числовыми матрицами управления и наблюдения, класс со стандартными параметризованными матрицами управления и наблюдения, класс компартментальных моделей. Например, рассмотрим модельную структуру (1) со стандартными матрицами управления и наблюдения. Стандартные матрицы состоят из нулей и единиц по одной единице в каждой строке матриц B^T и C полного строчного ранга, $rank\ B = k$, $rank\ C = m$. Таким образом, вектор системных параметров s состоит только из элементов матрицы состояний $s = \bar{A}$, с линейными независимыми ограничениями на них:

$$\psi \bar{A} = \psi_0. \tag{7}$$

Для этого класса моделей условия ранга для локальной и глобальной идентифицируемости имеют вид:

$$rank\, \psi\Lambda(J^1, J^2) = (n-k)(n-m), \tag{8}$$

$$rank\,\psi\Lambda^*(J^1,J^2)=(n-k)(n-m)\,, \qquad (9)$$

$$\Lambda^*(J^1,J^2)=A(\theta^*)I_n(J^2)\otimes I_n(J^1)-I_n(J^2)\otimes A^T(\theta)I_n(J^1)$$
$$\Lambda(J^1,J^2)=A(\theta)I_n(J^2)\otimes I_n(J^1)-I_n(J^2)\otimes A^T(\theta)I_n(J^1)$$

J^1 и J^2 - множества индексов, соответствующих нулевым столбцам матриц B^T и C соответственно, $I_n(J^i)$ - подматрица единичной матрицы I_n, состоящая из столбцов с номерами из J^i, $i=1,2$.

III. МЕТОД АНАЛИЗА ГЛОБАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ НА ОСНОВЕ СЕПАРАТОРОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Использование необходимого и достаточного условия глобальной идентифицируемости предполагает проверку совместности L систем вида (6). Данный способ оказывается наиболее простым методом анализа глобальной идентифицируемости, так как обычно (с использованием других методов) для подобного анализа требуется решение некоторой системы нелинейных алгебраических уравнений в символьном виде. Однако возможно еще более упростить анализ, используя так называемые *сепараторы параметрического пространства*. Понятие сепаратора параметрического пространства было введено впервые в работах [7], [8].

Определение 1. *Сильными сепараторами* называются подпространства размерности $d-1$ (d - размерность параметрического пространства), разделяющие параметрическое пространство на различные связные области, в каждой из которых имеется одно и только одно решение задачи параметрической идентификации.

В соответствии с этим определением уравнения сильных сепараторов могут быть использованы для формирования неравенств, задающих границы областей, в каждой из которых находится единственное решение задачи параметрической идентификации. Следовательно, эти неравенства могут быть использованы для элиминирования глобальной неидентифицируемости.

К сожалению, не существует общего метода вычисления сильных сепараторов. В [8] приводятся очень простые примеры эвристического нахождения таких сепараторов с использованием теоремы коэрцитивности по норме. Однако общей методики их построения до сих пор не создано. Используя наш подход, мы видим возможность построения общего метода построения сильных сепараторов параметрического пространства.

Определение 2. *Слабым сепаратором* параметрического пространства назовем равенство вида $f_l(\theta,\theta)=0$, где $f_l(\theta,\theta)=f_l(\theta^*,\theta)\big|_{\theta^*=\theta}$, $f_l(\theta^*,\theta)=0$ - соотношение, для которого условие (4) не выполняется. Слабый сепаратор, соответствующий совместной системе уравнений (6), называется *истинным*. Слабый сепаратор, соответствующий несовместной системе уравнений (6), называется *ложным*.

Заметим, что равенства, полученные из множителей $e_i(\theta^*)$ и $g_j(\theta)$ соотношения (5), с самого начала не рассматриваются в качестве кандидатов для построения сепараторов параметрического пространства. Действительно, уравнения $e_i(\theta^*)=0$ и $g_j(\theta)=0$ очевидно являются несовместными с системой (6) и не могут играть роль сильных сепараторов.

В соответствии с необходимым и достаточным условиями для СГИ, существование, по меньшей мере, одного сепаратора означает то, что модель является глобально неидентифицируемой, т.е. фактически приводит к сепарированию параметрического пространства. Следовательно, имеется веское основание думать, что истинные сепараторы являются в действительности сильными сепараторами, которые могут быть использованы для элиминирования глобальной неидентифицируемости.

Таким образом, предложенный метод анализа глобальной идентифицируемости с использованием сепаратов естественным образом распадается на два этапа. На первом этапе необходимо определить соотношения $f_l(\theta^*,\theta)=0$, для которых не выполняется условие ранга для СГИ, после чего построить уравнения слабых сепараторов, для которых не выполняется условие ранга для СГИ $f_l(\theta,\theta)=f_l(\theta^*,\theta)\big|_{\theta^*=\theta}=0$. На втором этапе для каждого слабого сепаратора, найденного на первом этапе, проверяется, является ли он истинным или ложным.

Очевидным (однако, неэффективным) методом определения слабых сепараторов $f_l(\theta^*,\theta)=0$ является факторизация (5). Однако, матрица $(\Gamma X^*)^T\Gamma X^*$ в (5) имеет сложный символьный вид, и факторизация ее определителя часто приводит к неуспеху по причине комбинаторного взрыва, даже для моделей небольших размерностей. Следующая теорема, доказанная в [6], оказывается полезной в построении эффективного алгоритма.

Теорема 1. Условие ранга для СГИ (4) не выполняется для соотношения $f(\theta^*,\theta)=0$:

$$rank\,\Gamma X^*\big|_{f(\theta^*,\theta)=0} < cols(\Gamma X^*)=n^2\,, \qquad (10)$$

тогда и только тогда, когда $f(\theta^*,\theta)$ является общим множителем определителей всех квадратных невырожденных подматриц размерности n^2 СГИ-матрицы ΓX^*.

С использованием теоремы 1 можно существенно упростить вычисление множителей $f(\theta^*,\theta)$ по сравнению с прямой факторизацией (5). Вместо факторизации определителя сложной матрицы $[(\Gamma X^*)^{\mathrm{T}}\Gamma X^*]$ можно факторизовать определитель любой невырожденной квадратной подматрицы размерности n^2 СГИ матрицы ΓX^*, а затем выбрать только те множители, которые действительно уменьшают ранг матрицы ΓX^*, т.е. действительно являются множителями всех других невырожденных n^2- подматриц матрицы ΓX^*. Эффективность предложенного метода следует из того факта, что матрица ΓX^* имеет намного более простой символьный вид зависимостей элементов от своих аргументов, чем матрица $[(\Gamma X^*)^{\mathrm{T}}\Gamma X^*]$.

Факторизация определителя может быть еще более упрощена, если перестановками строк и столбцов предварительно привести матрицу ΓX^* к блочно-треугольному виду с блоками на диагонали, имеющими меньшую размерность, чем исходная матрица. В результате имеем следующий алгоритм вычисления слабых сепараторов:

1) Выбираем произвольную квадратную невырожденную n^2 - подматрицу K матрицы ΓX^*;

2) Перестановками строк и столбцов приводим матрицу K к блочно-треугольному виду с блоками K_{ii}, $i=\overline{1,q}$, на диагонали возможно меньшей размерности:

$\det K = \det K_{11} \det K_{22} ... \det K_{qq}$;

3) Факторизуем каждый блок и получаем разложение на множители

$$\det K = \prod_i e_i(\theta^*)\prod_j g_j(\theta)\prod_l f_l(\theta^*,\theta),$$

объединяя множители всех блоков;

4) Проверяем для всех l условие

$$rank\, \Gamma X^*\Big|_{f_l(\theta^*,\theta)=0} < cols(\Gamma X^*) = n^2 \quad (11)$$

(11) имеет место, то множитель $f_l(\theta^*,\theta)$ формирует слабый сепаратор $f_l(\theta,\theta)=0$.

На втором этапе анализа глобальной идентифицируемости проверяется условие истинности для всех полученных слабых сепараторов. Одним из методов проверки является непосредственное применение необходимого и достаточного условия для СГИ, основанного на проверке совместности системы уравнений (6). Однако существует возможность использовать более простой метод, не требующий даже проверки совместности системы нелинейных алгебраических уравнений. Этот метод основан на критерии истинности сепаратора, сформулированного как гипотеза, подтвержденная большим количеством разнообразных исследованных моделей.

Критерий истинности сепаратора (гипотеза). Предположим, что на первом этапе анализа глобальной идентифицируемости мы получили уравнение слабого сепаратора

$$f(\theta,\theta) = f(\theta^*,\theta)\Big|_{\theta^*=\theta} = 0.$$

Рассмотрим дополнительную модельную структуру M_f, полученную добавлением нового ограничения $f(\theta,\theta)=0$ к первоначальной модельной структуре (1)-(2). Предположим, что модельная структура M_f является структурно управляемой и структурно наблюдаемой. При этих предположениях сепаратор $f(\theta,\theta)=0$ является истинным тогда и только тогда, когда модельная структура M_f локально идентифицируема.

Заметим, что этот критерий позволяет проверять истинность сепаратора только в том случае, если дополнительная модельная структура M_f оказывается управляемой и наблюдаемой. Если это условие не имеет места, то нет возможности использовать данный критерий. В данном конкретном случае проверка совместности системы уравнений остается единственной процедурой нахождения ответа.

IV. ПРИМЕР

Рассмотрим модель в пространстве состояний со следующими системными матрицами:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

на элементы которых наложены 5 независимых ограничений

$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=a_{31}=a_{11}+a_{21}+a_{31}=0.$$

Эта модельная структура принадлежит классу моделей со стандартными числовыми матрицами управления и наблюдения. Матрица ограничений ψ на системные параметры имеет вид:

$$\psi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сформируем вектор независимых системных параметров θ, состоящий из $9-5=4$ элементов:

$$\theta=\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\right)^T=\left(a_{21},a_{22},a_{32},a_{33}\right)^T.$$

Проверка условия ранга для СЛИ дает

$$rank\,\psi\Lambda(J^1,J^2)=cols\,\psi\Lambda(J^1,J^2)$$
$$=(n-k)(n-m)=4,$$

где $J^1=\{2,3\}$, $J^2=\{1,2\}$,

$$\psi\Lambda(J^1,J^2)=\begin{bmatrix}-a_{21}-a_{22} & -a_{32} & 0 & 0\\ 0 & -a_{21}-a_{33} & 0 & 0\\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22}-a_{33}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -a_{21} & 0 & -a_{21} & 0\end{bmatrix}$$

Таким образом, модель является СЛИ. Анализ глобальной идентифицируемости начинается с вычисления СГИ-матрицы:

$$\psi\Lambda^*(J^1,J^2)=\begin{bmatrix}-a^*_{21}-a_{22} & -a_{32} & 0 & 0\\ 0 & -a^*_{21}-a_{33} & 0 & 0\\ 0 & a_{21} & 0 & a^*_{22}-a_{33}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -a_{21} & 0 & -a_{21} & 0\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\psi\Lambda^*\right)^T\left(\psi\Lambda^*\right)$$
$$=a_{21}{}^2(a^*_{22}-a_{33})^2(a^*_{21}+a_{22})^2(a^*_{21}+a_{33})^2.$$

Вычисляем соотношения, для которых условие ранга не выполняется, т.е. $rank\,\psi\Lambda^*(J^1,J^2)<4$:

$$f_1(\theta^*,\theta)=a^*_{22}-a_{33}=0,$$
$$f_2(\theta^*,\theta)=a^*_{21}+a_{22}=0,$$
$$f_3(\theta^*,\theta)=a^*_{21}+a_{33}=0.$$

Из последних соотношений имеем уравнения слабых сепараторов:

$$f_1(\theta\ ,\theta)=\theta_2-\theta_4=a_{22}-a_{33}=0,$$
$$f_2(\theta\ ,\theta)=\theta_1+\theta_2=a_{21}+a_{22}=0, \qquad (12)$$
$$f_3(\theta\ ,\theta)=\theta_1+\theta_4=a_{21}+a_{33}=0.$$

Легко проверить, что каждое из уравнений (12) приводит к совместной системе (6), поэтому все три сепаратора являются истинными. Исследуем их свойства и геометрию. Покажем, что истинные сепараторы (12) в действительности являются сильными сепараторами, т.е. разделяют параметрическое пространство на различные связные подмножества, каждое из которых содержит единственное решение задачи параметрической идентификации (фактически задачи оценивания неизвестных параметров модели).

Для начала заметим, что третье уравнение системы (12) линейно зависит от двух первых уравнений. Поэтому три гиперповерхности, соответствующих этим сепараторам, пересекаются по прямой линии (не в точке). Таким образом, целое параметрическое пространство разделяется на шесть областей. Следовательно, имеется 6 решений задачи параметрической идентификации. Действительно, решая систему уравнений подобия, мы получаем в точности шесть решений задачи параметрической идентификации:

$$\left(\theta^*\right)_{(1)}=H_1(\theta)=\begin{pmatrix}a^*_{21}=a_{21}\\ a^*_{22}=a_{22}\\ a^*_{32}=a_{32}\\ a^*_{33}=a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\left(\theta^*\right)_{(2)}=H_2(\theta)=\begin{pmatrix}a^*_{21}=a_{21}\\ a^*_{22}=a_{33}\\ a^*_{32}=a_{32}\\ a^*_{33}=a_{22}\end{pmatrix},$$

$$\left(\theta^*\right)_{(3)}=H_3(\theta)=\begin{pmatrix}a^*_{21}=-a_{22}\\ a^*_{22}=-a_{21}\\ a^*_{32}=-\dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{22}}\\ a^*_{33}=a_{33}\end{pmatrix},$$

$$\left(\theta^*\right)_{(4)}=H_4(\theta)=\begin{pmatrix}a^*_{21}=-a_{22}\\ a^*_{22}=a_{33}\\ a^*_{32}=-\dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{22}}\\ a^*_{33}=-a_{21}\end{pmatrix},$$

$$\left(\theta^*\right)_{(5)}=H_5(\theta)=\begin{pmatrix}a^*_{21}=-a_{33}\\ a^*_{22}=-a_{21}\\ a^*_{32}=-\dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{33}}\\ a^*_{33}=a_{22}\end{pmatrix},$$

$$\left(\theta^*\right)_{(6)}=H_6(\theta)=\begin{pmatrix}a^*_{21}=-a_{33}\\ a^*_{22}=a_{22}\\ a^*_{32}=-\dfrac{a_{32}a_{21}}{a_{33}}\\ a^*_{33}=-a_{21}\end{pmatrix}.$$

Покажем, что для произвольной точки θ параметрического пространства решения $\left(\theta^*\right)_{(1)}$ and $\left(\theta^*\right)_{(2)}$ всегда разделяются сепаратором - гиперповерхностью $f_1(\theta\ ,\theta)=\theta_2-\theta_4=a_{22}-a_{33}=0$. Более того, эта гиперповерхность пересекает отрезок между этими двумя точками ровно посередине. Точки z отрезка определяются следующим образом:

$$z=(1-\alpha)\left(\theta^*\right)_{(1)}+\alpha\left(\theta^*\right)_{(2)}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-\alpha)a_{21}+\alpha a_{21}\\ (1-\alpha)a_{22}+\alpha a_{33}\\ (1-\alpha)a_{32}+\alpha a_{32}\\ (1-\alpha)a_{33}+\alpha a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{22}+\alpha(a_{33}-a_{22})\\ a_{32}\\ a_{33}+\alpha(a_{22}-a_{33})\end{pmatrix},$$
$$0\le\alpha\le1.$$

Найдем точку пересечения вышеупомянутого отрезка с гиперповерхностью

$$f_1(\theta\ ,\theta) = \theta_2 - \theta_4 = a_{22} - a_{33} = 0:$$

$$f_1(z,z) = z_2 - z_4 = (a_{22} - a_{33})(1-2\alpha) = 0.$$

Точка z удовлетворяет уравнению сепаратора при $\alpha = 1/2$, т.е. отрезок, соединяющий две произвольные точки-решения $(\theta^*)_{(1)}$ и $(\theta^*)_{(2)}$ (произвольные, так как зависят от произвольной точки θ), разделяется гиперповерхностью $f_1(\theta\ ,\theta) = 0$ в точности посередине. Поэтому истинный сепаратор

$$f_1(\theta\ ,\theta) = \theta_2 - \theta_4 = a_{22} - a_{33} = 0$$

является на самом деле сильным сепаратором, разделяющим решения $(\theta^*)_{(1)}$ и $(\theta^*)_{(2)}$. Назовем такие решения *смежными решениями*.

Более того, легко показать, что отрезок, соединяющий точки-решения $(\theta^*)_{(1)}$ и $(\theta^*)_{(2)}$ перпендикулярен гиперповерхности

$$f_1(\theta\ ,\theta) = a_{22} - a_{33} = 0,$$

Которая в координатах z выражается как $z_2 - z_4 = 0$. Действительно, уравнение прямой линии в канонической форме может быть найдено, выражая параметр α из уравнения $z_2 = a_{22} + \alpha(a_{33} - a_{22})$ с последующей подстановкой его в уравнение $z_4 = a_{33} + \alpha(a_{22} - a_{33})$. В результате получае каноническое уравнение прямой в виде $\frac{z_4 - a_{33}}{1} = \frac{z_2 - a_{22}}{-1}$. Теперь становится очевидным, что выполняется условие перпендикулярности этой прямой к плоскости $z_2 - z_4 = 0$:

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}.$$

Таким же образом можно показать, что гиперповерхность $f_1(\theta\ ,\theta) = a_{22} - a_{33} = 0$ является сильным сепаратором пар решений $(\theta^*)_{(3)}$ и $(\theta^*)_{(4)}$, а также $(\theta^*)_{(5)}$ и $(\theta^*)_{(6)}$, т.е. эти пары также являются смежными решениями.

Легко убедиться, что сепаратор $f_2(\theta\ ,\theta) = \theta_1 + \theta_2 = a_{21} + a_{22} = 0$ разделяет напополам отрезки между тремя парами точек $(\theta^*)_{(1)}$ и $(\theta^*)_{(3)}$, $(\theta^*)_{(2)}$ и $(\theta^*)_{(5)}$, $(\theta^*)_{(4)}$ и $(\theta^*)_{(6)}$. Сепаратор $f_3(\theta\ ,\theta) = a_{21} + a_{33} = 0$ аналогично делит отрезки между точками $(\theta^*)_{(1)}$ и $(\theta^*)_{(6)}$, $(\theta^*)_{(2)}$ и $(\theta^*)_{(4)}$, $(\theta^*)_{(3)}$ и $(\theta^*)_{(5)}$.

Пространственное расположение решений задачи оценивания параметров для случая, когда точка θ расположена в области, ограниченной сепараторами $f_1(\theta\ ,\theta) = 0$ и $f_2(\theta\ ,\theta) = 0$, показано на *рис.* 1. Так как ранг системы (12) равен 2, возможно представить расположение областей и решений в двумерном пространстве. Каждая прямая линия на *рис.* 1 соответствует проекции сепаратора на плоскость, перпендикулярную прямой линии, являющейся пересечением трех сепараторов (центральная точка соответствует этому пересечению).

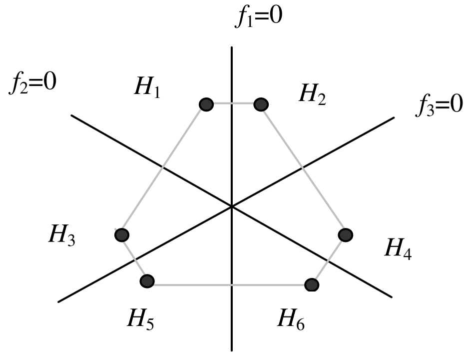

Рис. 1. Пространственное расположение решений H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 и сепараторов f_1, f_2, f_3

Из только что рассмотренного примера, а также на основании анализа идентифицируемости множества других моделей можно заключить следующее. Во-первых, во всех рассмотренных моделях истинные сепараторы в действительности оказывались сильными сепараторами. Во-вторых, число решений задачи параметрической идентификации равно числу связных областей, сформированных множеством сепараторов. Например. В случае одного линейного сепаратора мы имеем два решения. В-третьих, в случае линейных сепараторов смежные решения расположены на одинаковом расстоянии от сепаратора, причем соединяющий точки отрезок перпендикулярен гиперплоскости сепаратора. В-четвертых, в случае линейных сепараторов отображение $H_i : \Omega \to \Omega$, переводящее точку $(\theta^*)_{(1)} = \theta$ в смежную с ней точку $(\theta^*)_{(i)} = H_i(\theta)$ имеет обратное отображение $H_i^{-1} = H_i$. Для нашего примера решения $(\theta^*)_{(2)}$, $(\theta^*)_{(3)}$ and $(\theta^*)_{(6)}$ являются смежными точке $(\theta^*)_{(1)} = \theta$, поэтому $H_i^{-1} = H_i$ для $i = 2,3,6$.

V. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки РФ, проект ТП-8.536.2011 «Разработка интеллектуальных технологий, средств компьютерного моделирования и эффективных методов оптимизации, как функционального наполнения информационно-аналитических систем поддержки принятия решений».

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предлагается эффективный подход к анализу структурной идентифицируемости моделей в пространстве состояний. Рассматривается новый метод анализа глобальной идентифицируемости на основе поиска сепараторов параметрического пространства. Предлагается двухшаговая процедура построения истинных сепараторов. На первом этапе мы находим слабые сепараторы как соотношения, для которых не выполняется достаточное условие глобальной идентифицируемости (условие ранга для СГИ).

Предложенные методы позволяют существенно уменьшить объем символьных вычислений, генерируемых в процессе анализа идентифицируемости модельной структуры, и, таким образом, увеличить размерность моделей, которые могут быть исследованы с использованием чисто символьных вычислений (с 7-8 для глобального анализа до 15 и больше для анализа локальной идентифицирумости).

Уравнения сепараторов, построенные с помощью предлагаемого подхода, могут быть очень полезными для элиминирования глобальной неидентифицируемости, а также в алгоритмах оценивания неизвестных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ljung L. and T.Glad On global identiability for arbitrary model parametrization. *Automatica* 30, 1994, pp. 265-276.

[2] Walter E. *Identifiability of state space models*/ Berlin, Germany: Springer-Verlag. – 1982. – 197 p.

[3] Audoly, S., L. D'Angio, M.P. Saccomany and C. Cobelli. Global identifiability of linear compartmental models - a computer algebra algorithm. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 45, 1998, pp. 36-47.

[4] Avdeenko T.V. (2002). On structural identifiability of system parameters of linear models. *Proc. of 15 IFAC World Congress*. Barselona, Spain. 6 p.

[5] Авдеенко Т.В., Горский В.Г. Построение динамических моделей в пространстве состояний: анализ структурной идентифицируемости: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ (Серия "Монографии НГТУ"), 2007, 292 с.

[6] Avdeenko T.V. A Versatile Approach to Structural Identifiability Test of Linear Systems using Parameter Space Separators. Proc. of the 17th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling (ASM-2008), Corfu, Greece. 2008. P. 255-260.

[7] Delforge J., L.d'Angio and S.Audoly. Results and conjectures on the global identifiability of linear systems. *Proc. of the 7th IFAC/IFORS Simposium on Identification and System Parameter Estimation*, 1985. **1**. pp. 517-522. Pergamon. York.

[8] Delforge J., L.d'Angio and S.Audoly. Results and conjectures on the identifiability of linear systems. – In: *Identifiability of parametric models.* (E. Walter (Ed.)). 1987, pp. 21–31. Pergamon Press, Oxford.

Авдеенко Татьяна Владимировна – доктор технических наук, профессор, работает заведующей кафедрой Экономической информатики Новосибирского государственного технического университета. Является автором 105 публикаций. Область научных интересов – моделирование, идентификация, оптимизация, интеллектуальные информационные системы.
E-mail: tavdeenko@mail.ru